# Examen-final-Enero-Farmacia.pdf

IngurumenZientz

Matematicas y Estadistica

1° Grado en Farmacia

Facultad de Farmacia - Campus Álava
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Orbit ¿DÍA DE CLASES infinitas?

**1.-** Supongamos que reaccionan dos compuestos **A** y **B**, formando una sustancia **C**. Por cada 3 gramos de **A** reaccionan 1 de **B**.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & + & \mathbf{B} & \to & \mathbf{C} \\ 3 & & 1 & & 4 \end{array}$$

Inicialmente hay 100 gramos de **A** y 30 de **B**. Se observa que a los 20 minutos se han formado 10 gramos de **C**.

- ¿Cuánto se formará a los 15 minutos?
- ¿Cuánto quedará sin reaccionar de **A** y **B**, después de un tiempo suficientemente largo?
- ¿En qué instante se quedarán 40 gramos de **A**?

**Solución:** Los datos son

$$M = 3,\ N = 1,\ a = 100,\ b = 30,\ t_1 = 20,\ x_1 = 10,\ \alpha = \frac{M}{M+N} = \frac{3}{4},\ 1-\alpha = \frac{1}{4}.$$

Luego

$$c = -5/2, \qquad cK = -\frac{\ln(111/110)}{20} = -0'000452491.$$

Luego, como $c < 0$, resulta

$$\begin{cases} & \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{b}{1-\alpha} = 120, & \\ \mathbf{A} & \lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \alpha \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 90 & \text{quedan de } \mathbf{A} \quad 10, \\ \mathbf{B} & \lim\limits_{t\to\infty} b(t) = (1-\alpha) \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 30 & \text{quedan de } \mathbf{B} \quad 0. \end{cases}$$

Ahora, como

$$x(t) = \frac{ab\left(\mathrm{e}^{cKt}-1\right)}{b\alpha\mathrm{e}^{cKt} - a(1-\alpha)} = \frac{1200\left(\mathrm{e}^{cKt}-1\right)}{9\mathrm{e}^{cKt}-10},$$

resulta

$$x(15) = 7'651456.$$

Finalmente, como $a(t) = \alpha x(t)$, entonces, quedan 40 gramos de **A** cuando $a(t) = 60$. Es decir, cuando $x(t) = 80$. Ahora, utilizando la expresión

$$cKt = \ln\left(\frac{a[b-(1-\alpha)x(t)]}{b[a-\alpha x(t)]}\right) = \ln\left(\frac{10[120-x(t)]}{3[4000-3x(t)]}\right),$$

entonces, cuando $x(t) = 80$, resulta

$$cKt = \ln\left(\frac{5}{6}\right) \Rightarrow t = \frac{\ln(5/6)}{cK} = 402'9278905.$$

masca y fluye

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

**2.-** Resolver los problemas de condiciones iniciales siguientes.

**a)** $\begin{cases} (x^2+3tx-2t^2)x' + 2x^2 + 6tx = 0, \\ x(0) = 2. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathrm{e}^t + \left(\mathrm{e}^t \cot(x) + 2x \operatorname{cosec}(x)\right) x' = 0, \\ x(0) = \pi/4. \end{cases}$

**Solución (a):** Escribiendo

$$x' = \frac{-6tx - x^2}{x^2 + 3tx - 2t^2} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-6tx - x^2}{x^2 + 3tx - 2t^2} = F(t,x)$$

la ecuación diferencial es homogénea. Haciendo el cambio $x = tu$, como

$$F(1,u) - u = -\frac{u^3 + 5u^2 + 4u}{u^2 + 3u - 2},$$

la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{u^2+3u-2}{u^3+5u^2+4u}du = -\frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{u^2+3u-2}{u^3+5u^2+4u}du = -\int \frac{dt}{t}.$$

Ahora, como

$$\frac{u^2+3u-2}{u^3+5u^2+4u} = \frac{-1/2}{u} + \frac{4/3}{u+1} + \frac{1/6}{u+4},$$

multiplicando por 6 la igualdad queda en la forma

$$\int \left(\frac{-3}{u} + \frac{8}{u+1} + \frac{1}{u+4}\right) du = -\int \frac{6dt}{t}.$$

Integrando

$$-3\ln(u) + 8\ln(u+1) + \ln(u+4) = -6\ln(t) + C \Rightarrow ln\left(\frac{(u+1)^8(u+4)t^6}{u^3}\right) = C \Rightarrow \frac{(u+1)^8(u+4)t^6}{u^3} = C.$$

Deshaciendo el cambio: $u = x/t$ la igualdad queda

$$\frac{(x+t)^8(x+4t)}{x^3} = C.$$

Finalmente, con la condición inicial $x(0) = 2$, obtenemos $C = 2^6 = 64$. Por lo tanto, la solución viene dada por

$$\frac{(x+t)^8(x+4t)}{x^3} = 64.$$

**Solución (b):** Vamos a tratar de resolverla como una exacta. Para ello, la reescribimos en la forma

$$\mathrm{e}^t dt + \left(\mathrm{e}^t \cot(x) + 2x \operatorname{cosec}(x)\right) dx = 0.$$

Observemos que como

$$P = \mathrm{e}^t dt,\ Q = \mathrm{e}^t \cot(x) + 2x \operatorname{cosec}(x), \qquad P_x = 0,\ Q_t = \mathrm{e}^t \cot(x).$$

Luego, no es exacta. Buscamos un factor integrante. Notemos que

$$\frac{Q_t - P_x}{P} = \cot(x).$$

Luego, existe un factor integrante que depende de $x$. Este viene dado por la expresión

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \cot(x)dx} = \operatorname{sen}(x).$$

Luego, multiplicando por $\operatorname{sen}(x)$ la ecuación original, obtenemos

$$\operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t dt + \left(\mathrm{e}^t \cos(x) + 2x\right) dx = 0,$$

que es exacta, como puede comprobarse.

Ahora, para resolverla, buscamos una función potencial $U$ de manera que

$$U_t = P,\ U_x = Q. \qquad \text{La solución será } U(t,x) = C.$$

Usando, por ejemplo, $U_t = P = \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t$,

$$U = \int P dt = \int \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t dt = \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t + f(x).$$

De otro lado, como $U_x = Q = \mathrm{e}^t \cos(x) + 2x$, derivando con respecto a $x$ en la igualdad, resulta

$$U_x = Q \Leftrightarrow \cos(x)\mathrm{e}^t + f'(x) = \mathrm{e}^t \cos(x) + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2.$$

Sustituyendo en la igualdad, deducimos que la función potencial es

$$U = \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t + x^2 \Rightarrow \text{La solución general es } \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t + x^2 = C.$$

Finalmente, con la condición inicial $x(0) = \pi/4$, resulta $C = \sqrt{2}/2 + \pi^2/16$. Luego la solución de nuestro problema es

$$\operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^t + x^2 = \sqrt{2}/2 + \pi^2/16.$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Día de clases infinitas? Masca y fluye - Orbit

**3.- Consideremos la siguiente tabla de datos**

| $x_k$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y_k$ | $0'62$ | $1'65$ | $2'7$ |

.

**Ajustando los datos de dicha tabla a una función exponencial, por el método de mínimos cuadrados, hemos obtenido la función**

$$y = 0'32218\mathrm{e}^{0'73564x}, \quad \textbf{con un error estándar de } 0'19636.$$

**Dar una estimación para $x = 2'25$, utilizando las regresiones exponencial y potencial.**

**SUMAS**

| | $x_k$ | $\frac{1}{x_k}$ | $\ln(x_k)$ | $x_k^2$ | $\frac{1}{x_k^2}$ | $\ln(x_k)^2$ | $y_k$ | $\frac{1}{y_k}$ | $\ln(y_k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma$ | 6 | $1'8333$ | $1'7917$ | 14 | $1'3611$ | $1'6874$ | $4'97$ | $2'5893$ | $1'0159$ |

| | $x_k y_k$ | $x_k \ln(y_k)$ | $\ln(x_k) y_k$ | $\ln(x_k)\ln(y_k)$ | $\frac{1}{x_k} y_k$ | $\frac{1}{x_k}\frac{1}{y_k}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma$ | $12'02$ | $3'5032$ | $4'1099$ | $1'4383$ | $2'345$ | $2'0393$ |

**Solución:** Hemos de calcular la función de regresión potencial, puesto que la exponencial ya está dada. Así, la función que buscamos es

$$y = bx^a.$$

Denotando por

$$Y = \ln(y), \qquad X = \ln(x), \qquad B = \ln(b) \Leftrightarrow b = \mathrm{e}^B,$$

buscamos la recta de regresión

$$Y = aX + B.$$

Calculando, obtenemos

$$a = \frac{3 \cdot (1'4383) - 1'7917 \cdot 1'0159}{3 \cdot 1{,}6874 - 1{,}7917^2} = 1'347, \qquad B = \frac{1'0159 - 1'347 \cdot 1{,}7917}{3} = -0'46583.$$

Ahora, como $b = \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{-0'46583} = 0'62761$, la función que buscamos es

$$y = 0'62761x^{1'347}.$$

Calculamos el error típico o estándar.

| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| $y_k$ | $0'62$ | $1'65$ | $2'7$ | |
| $\tilde{y}_k = 0'62761x_k^{1'347}$ | 0,6276 | 1,5965 | 2,7565 | |
| $(\tilde{y}_k - y_k)^2$ | $5{,}7911 \cdot 10^{-5}$ | 0,0028589 | 0,0032024 | $\sum = 0{,}0061192.$ |

$$\Rightarrow \text{Error} = \sqrt{\frac{0{,}0061192}{3}} = \mathbf{0{,}045163}$$

Conclusión, la que mejor se ajusta es la potencial. Por lo tanto, en $x = 2'25$ estimamos

$$y = 0'62761 \cdot 2'25^{1'347} = 1{,}871.$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

¿Día de clases infinitas? Masca y fluye - Orbit

Orbit ¿DÍA DE CLASES infinitas?

**4.- Sean los sucesos $A$ y $B$ tales que $P(A) = 0'6$, $P(A \cap B) = 0'4$ y $P(A^c/[A \cup B^c]) = 0'4$. Calcular $P(B)$.**

**Solución:** Notemos que

$$P(A^c/[A \cup B^c]) = \frac{P(A^c \cap [A \cup B^c]}{P(A \cup B^c)} = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A \cup B^c)} = \frac{P([A \cup B]^c)}{P(A \cup B^c)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(A \cup B^c)}$$

$$= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B)}$$

Luego

$$0'4 = \frac{1 - 0'6 - P(B) + 0'4}{0'6 + 1 - P(B) - 0'6 + 0'4} \Rightarrow P(B) = 0'4.$$

**5.-**Un tratamiento para la esterilización de las palomas, tiene una efectividad del 90 %. Si se aplica a un total de 200 palomas, calcular la probabilidad de que el número de palomas esterilizadas sea mayor que 87 %.

**Solución:** Estamos en el caso de una distribución binomial $X = B(200, \sqrt{18})$, y nos piden

$$P[X > 174] = P[X \geq 175].$$

Observemos que $np = 180 > 5$ y $nq = 20 > 5$, luego la variable $X$ se puede aproximar por una distribución normal

$$Y = N(np, \sqrt{npq}) = N(180, \sqrt{18}).$$

Por lo tanto

$$P[X \geq 175] \simeq P[Y \geq 174{,}5] = P\left[N(0,1) \geq \frac{174{,}5 - 180}{\sqrt{18}} = -1'296\right] = P\left[N(0,1) \leq 1'29 =\right] 0'9015.$$

**6.-** Una empresa farmacéutica elabora un fármaco que contiene arsénico y paracetamol. Cada dosis no puede tener más de 0'005 mg. de arsénico y como mínimo 0'65 mg. de paracetamol. En una muestra de 101 dosis se obtienen los siguientes datos:

Arsénico: media 0'0062 mg., varianza 0'007 mg. Paracetamol: media 0'62 mg., varianza 0'02 mg.

La empresa afirma que su fármaco cumple las condiciones prescritas. Contrastar la afirmación de la empresa, con un nivel de significación $\alpha = 0{,}01$.

**Solución:** Son dos problemas de contrastes de hipótesis para la media de una población normal, con varianza desconocida.

Arsénico: Hipótesis nula $\mu_0 \leq 0'001$, contraste unilateral superior. Se acepta si

$$\frac{\hat{\mu}_0 - \mu_0}{s_0/\sqrt{\boldsymbol{n}}} \leq t_{\boldsymbol{n-1},1-\alpha} \Leftrightarrow \frac{0'0062 - 0'005}{s_0/\sqrt{101}} \leq t_{100,0'99} \Leftrightarrow \frac{0'0012}{s_0/\sqrt{101}} \leq 2'3642.$$

Notemos que

$$s_0^2 = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-1}}\hat{\sigma}_0^2 \Rightarrow \frac{s_0}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{\boldsymbol{n-1}}} = \frac{\sqrt{0'007}}{\sqrt{100}} = 0'0083.$$

Finalmente, comparando las expresiones, aceptamos la hipótesis si

$$\frac{0'0012}{0'0083} = 0'1445783132 \leq 2'3642. \quad \text{Se acepta.}$$

Paracetamol Hipótesis nula $\mu_0 \geq 0'65$, contraste unilateral inferior. Se acepta si

$$\frac{\hat{\mu}_0 - \mu_0}{s_0/\sqrt{\boldsymbol{n}}} \geq -t_{\boldsymbol{n-1},1-\alpha} \Leftrightarrow \frac{0'62 - 0'65}{s_0/\sqrt{101}} \geq -t_{100,0'99} \Leftrightarrow \frac{-0'03}{s_0/\sqrt{101}} \leq 2'3642.$$

Operando como en el caso anterior, resulta

$$\frac{s_0}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} = 0'01414213562.$$

Luego, se acepta la hipótesis si

$$\frac{-0'03}{0'01414213562} \geq -2'3642 \Leftrightarrow -2'121320344 \geq -2'3642. \quad \text{Se acepta.}$$

masca y fluye

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

**NOTAS PREVIAS-FARMACIA**

| | ED-A | ED | REG | EST |
|---|---|---|---|---|
| [redacted] | 0 | 0 | 0’5 | 2 |
| [redacted] | 0 | 1’25 | 1’5 | 1’25 |
| [redacted] | 0 | 0 | 0’75 | 3 |
| [redacted] | 1 | 0 | 1’5 | 2 |
| [redacted] | 0’75 | 0 | 1’5 | 2 |
| [redacted] | | | 0’5 | |
| [redacted] | | | 0’75 | |
| [redacted] | 0’75 | 0’5 | 0’25 | 1 |
| [redacted] | 0 | 0 | 1’5 | 2 |
| [redacted] | | | 1’5 | |
| [redacted] | 0’5 | 0 | 1’5 | 1 |
| [redacted] | | | 0’5 | |
| [redacted] | 1 | 1’25 | 1’5 | |
| [redacted] | | | 0’25 | |
| [redacted] | 1 | 0 | 1’5 | 1 |
| [redacted] | 0 | 0 | 0’5 | |
| [redacted] | 0’5 | 0’5 | 1’5 | 1’5 |

1- **ED-A:** Ecuaciones diferenciales- Aplicaciones: 2 puntos
2.- **ED**: Ecuaciones diferenciales: 2.5 puntos
3.- **REG**: Regresión: 1.5 puntos
4.- **EST:** Estadística: 4 puntos

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH